රුහුණ විශ්වවිද්‍යාලය - දූරස්ථ හා අඛණ්ඩ අධ්‍යාපන ඒකකය
මානව ශාස්ත්‍ර හා සමාජීය විද්‍යා පීඨය - ආර්ථිකවිද්‍යා අධ්‍යයනාංශය
ST 1.1 – මූලික ගණිතය - Basic Mathematics
විෂය ප්‍රතිපෝෂණ සම්මන්ත්‍රණ මාලාව
ප්‍රථම ශාස්ත්‍ර (බාහිර) පරීක්ෂණය - 2016

ද්විපද ප්‍රමේයය (Binominal Theorem)
හැඳින්වීම

විජීය ප්‍රකාශන ලෙස හැඳින්වෙන $(a+b), (2x+3y), \left(\frac{a+b}{x}\right), (a+x), \left(\frac{a-1}{x}\right)$ ආදී වශයෙන් වූ පද දෙකක් සහිත ප්‍රකාශන ද්විපද ප්‍රකාශන වේ. $(a+x)^n$ සැලකුවහොත් a හා x ඇතුළත් පද රාශියක් තිබිය හැකිය.

$(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2$

$(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$

$(a+x)^4 = a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4$

මෙහි වම් පැත්තේ ඇති ප්‍රකාශන ප්‍රසාරණය කර දකුණු පැත්තේ දක්වා ඇත. මෙහිදී ඕනෑම දර්ශකයක් සහිත ද්විපද සඳහා ප්‍රකාශනයක් ප්‍රසාරණය කළ හැකිය.

ද්විපද ප්‍රමේයය අර්ථ දැක්වීම

n යනු ධන පූර්ණ සංඛ්‍යාවක් විට $(a+b)^n$හි ප්‍රසාරණය ද්විපද ප්‍රමේයය මගින් ප්‍රකාශ වෙයි.

$(a+x)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}x^1a^{n-1} + \binom{n}{2}x^2a^{n-2} + \binom{n}{3}x^3a^{n-3} + \cdots + \binom{n}{r}x^ra^{n-r} + \cdots + \binom{n}{n}x^n$ ලෙස එය ප්‍රකාශ කළ හැකිය.

මෙහි $\binom{n}{r} = {}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ වේ.

ඒ අනුව $(x+a)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^ra^{n-r}$ ලෙසද ප්‍රකාශ කළ හැකිය.

ද්විපද ප්‍රකාශනයක සහ ප්‍රකාශනය සුළු කිරීමෙන් පසු ප්‍රසාරණයේ තිබෙන ගුණාංග

1. ප්‍රකාශනයේ පද දෙකක් සහ දර්ශකයක් තිබිය යුතුය.
2. ප්‍රකාශනයේ $(a+x)$ දර්ශකයේ අගයට වඩා එකක් වැඩියෙන් ප්‍රසාරණයේ පද පවතී.
3. ප්‍රසාරණයේ එක් එක් කොටසේ a හා x හි දර්ශකවල ඓක්‍යය ද්විපද ප්‍රකාශනයේ දර්ශකයේ අගයට සමාන විය යුතුය.
4. ද්විපද ප්‍රකාශනයක් ප්‍රසාරණයේදී පළමුවන කොටසේ පවතිනුයේ ද්විපද ප්‍රකාශනයේ දර්ශකයම ඇතිව එම ප්‍රකාශනයේ පළමු පදයයි. දෙවන කොටසේදී එම පදයේ දර්ශකය එකකින් අඩු වේ. මෙලෙසින් දර්ශකය අඩුවෙමින් ගොස් අවසාන කොටසේදී දර්ශකය 0 වේ.
   $(a+x)^4 = \underline{a^4} + 4\underline{a^3}x + 6\underline{a^2}x^2 + 4\underline{a}x^3 + \underline{a^0}x^4$
5. එලෙසම දෙවන පදයේ දර්ශකය පළමු කොටසේදී 0 ක් වී දෙවන කොටසේ සිට දර්ශකයේ අගය එකින් එක වැඩිවෙමින් ගොස් අවසාන කොටසේදී අගය ද්විපද ප්‍රකාශනයේ දර්ශකයට සමාන වේ.
   $(a+x)^4 = a^4\underline{x^0} + 4a^3\underline{x^1} + 6a^2\underline{x^2} + 4a\underline{x^3} + \underline{x^4}$
6. ප්‍රසාරණයේ මැද කොටසේ සිට සම දුරින් පිහිටි කොටස්වල සංගුණක සමාන වේ.

සංකරණ සහ සංයෝජන (Permutation and Combinations)
හැඳින්වීම

විවිධ අවස්ථාවලදී යම් කිසි කුලකයක පවතින අවයව විවිධ ආකාරයට පිළියෙල කිරීමට අපට අවශ්‍ය විය හැකිය. උදාහරණයක් ලෙස ළමයි 60 කගෙන් 15 ක් තෝරා ගැනීමට අවශ්‍ය විය හැකිය. ඉලක්කම් 10කින් ඉලක්කම් 5 ක සංඛ්‍යාවක් ගොඩනැගීමට අවශ්‍ය විය හැකිය. මෙවැනි පිළියෙල කිරීම් කොපමණ සිදු වේදැයි ගැන බැලීමෙන් ගණනය කිරීම අසීරුය. උදාහරණයක් ලෙස a, b, c, d යන අකුරු 4 සැලකීමෙන් අකුරු 2 ක් භාවිතා කර ගොඩනැගිය හැකි පිළියෙල කිරීම් ගණන සෙවීම සලකන්න. එවිට ab, ac, ad, bc, bd, cd යන අවස්ථා 6 ලැබේ. තවත් ලෙසකින් මෙම a, b, c, d යන අකුරුවලින් පළමුවන ස්ථානය දෙවන ස්ථානය ලෙස ස්ථානගත කිරීමේ පිළිවෙල සැලකුවහොත් මෙම අකුරු 4 න් මීටත් වඩා වැඩි ආකාර සංඛ්‍යාවක් ලබා ගත හැකිය. එනම් ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, bd, db, cd, dc. මෙහි ab සහ ba යනු a පළමු ස්ථානය ගෙන b දෙවන ස්ථානය ගැනීම හා b පළමු ස්ථානය ගෙන a දෙවන ස්ථානය ගැනීම යන අවස්ථා 2 යි. මෙය වෙනස්

ආකාර දෙකකි. මෙසේ විවිධාකාර වූ රටාවන් බිහිවෙන ආකාරයට කාණ්ඩගත කිරීමට සංකරණ හා සංයෝජන යොදා ගනු ලැබේ.

<u>සංකරණ **(Permutation)**</u>

දෙන ලද සංඛ්‍යා කුලකයකින් අවයව කිහිපයක් හෝ සියල්ලම ගෙන එහි රටාව සලකමින් ගොඩනැගිය හැකි පිළියෙල කිරීම් ගණන සංකරණ ලෙස අර්ථ දැක්වේ. දෙන ලද කුලකයේ අවයව ගණන n සහ ගොඩනංවන ලද සංකරණයේ අවයව ගණන r ලෙස ගන්නේ නම් ගොඩනැගිය හැකි සියළුම සංකරණ ප්‍රමාණය ^nP_r හෝ $P(n,r)$ ලෙස ලිවිය හැකිය. බොහෝවිට මෙය අංකනය කිරීමට භාවිත කරනුයේ $\boxed{^nP_r}$ සංකේතයයි.

<u>සංකරණ සඳහා මූලික නීති</u>

සරළ උදාහරණයක් සැලකීමෙන් සංකරණ සඳහා වන සරළම නීතිය හඳුනා ගැනීමට හැකිය. පළමු ශ්‍රේණියේ සහ දෙවන ශ්‍රේණියේ රැකියා පුරප්පාඩු දෙකක් ඇත. පුද්ගලයන් 5 දෙනෙකුගෙන් මෙම රැකියා පුරප්පාඩු දෙක පිරවිය හැකි ආකාර සංඛ්‍යාව කීයද? පළමු පුරප්පාඩුවට පුද්ගලයන් 5 දෙනාම ඇතුළත් කළ හැකිය. එහෙත් දෙවන පුරප්පාඩුව ඇතුළත් කළ හැක්කේ හතර දෙනෙකු පමණි. හේතුව එක් අයෙකු පළමු පුරප්පාඩුවට ඇතුළත්වීමයි. එවිට එම පුරප්පාඩු දෙක පිරවිය හැකි ආකාර ගණන 5x4 වේ. එනම් 20 කි. මෙහිදී පළමු පුරප්පාඩුව පිරවීමට කිසිවෙකුගෙන් බලපෑමක් නැත. එනිසා එය 5 ආකාරයකින් පිරවිය හැකිය.දෙවන පුරප්පාඩුව පිරවීමටද එක් අයෙකු ඉවත්වීමෙන් පසු කිසිවෙකුගෙන් බලපෑමක් නැත. එමනිසා එයද 4 ආකාරයක් ලෙස ගන්නා ලදී. මෙලෙසින් පළමු අවස්ථාව n_1 ද දෙවන අවස්ථාව n_2 ද තෙවන අවස්ථාව n_3 ද ලෙස සැලකූවිට මුළු අවස්ථා ගණන $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots$ ලෙස දක්වනු ලැබේ.

<u>මුළු සංඛ්‍යාවම සංකරණ ලෙස ගන්නා අවස්ථාව</u>

n අවයම ගණනක් ඇතිවිට ඉන් r අවයව ගණනක් සහිත සංකරණ ලබා ගන්නේ යැයි සිතමු. එවිට පළමු අවස්ථා ගණන n වේ. දෙවන අවස්ථා සණන $(n-1)$ වේ. එමෙන්ම තෙවන අවස්ථාවේ $(n-2)$ වේ. ඒ නිසා r වන අවස්ථාවේ $n-(r-1)$ එනම් $n-r+1$ වේ. මෙය සංකරණ සංකේතය අනුව ලියූ විට

$^nP_r = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-(r-1))$

මෙහි $r = n$ විට

$^nP_r = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 3.2.1$

මෙය කෙටිකර n! භාවිත කර ලියූ විට

$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 3.2.1$ ($n!$ =ක්‍රමාරෝපිත n)

මුළු සංඛ්‍යාවම සංකරණ ලෙස ගන්නා අවස්ථාවේ සංකරණ ප්‍රමාණය $n!$ වේ.

<u>නැවත නැවත යෙදිය හැකි වන ලෙස ගොඩනගන සංකරණ</u>

මෙහිදී පළමු අවස්ථාවට මුහුණදුන් අවයවයට දෙවන, තුන්වන වශයෙන් යෙදෙන සෑම අවස්ථාවකටම මුහුණ දිය හැකි නම් එම අවයව ගණන යෙදෙන වාර ගණනේ බලයක් ලෙස සංකරණ ගොඩ නැගේ. එනම් n අවයව ගණනක් පවතින විට r වාරයක් අවස්ථා ගණන පවතී නම් n. n. n …ලෙස r වාරයක් n යෙදේ. එනිසා මුළු සංකරණ ගණන n^r

<u>වෘත්ත සංකරණ නීතිය</u>

මීට පෙර අප අධ්‍යයනය කරන ලද්දේ රේඛීය ආකාරයට පවතින සංකරණයය. එහිදී මුලට අගයක් සහ අගට අගයක් පැවතිනි. එහෙත් මෙම තත්ත්වය වෙනස් කළහොත් එනම් රවුමකට පිහිටන සංකරණ ගතහොත් රේඛීය සංකරණවලට වඩා වෙනස් වේ. එහිදී නිතරම පවතින අවයව ගණනට වඩා එකක් අඩුවෙන් පවතින ක්‍රමාරෝපිත සංඛ්‍යාවක් සංකරණවලට යෙදේ. එනම් n අවයව ගණනක් සහිත වෘත්ත සංකරණය වනුයේ $(n-1)!$ ය.

<u>සියලුම අවයව වෙනස් නොවන සංකරණ (පුනරාවර්ථන සහිත සංකරණ)</u>

සමහර අවස්ථාවලදී සංකරණ සොයනවිට මුළු අවයව අතර සමාන අවයව පැවතිය හැකිය. එවිට එක් අවයවයක් එක් ස්ථානයකට පමණක් වැටෙන බව n! පමනක් ගැනීමෙන් අදහස් වේ. නමුත් සමාන අවයව පවතින විට ඒ තුළ එකම සංකරණය නැවත ගණන් ගැනේ. මෙම තත්ත්වය මගහැරවීම සඳහා ද සංකරණ නීතියක් පවතී. එනම් n අවයව ගණනක් පවතින කුලකයක් ගතහොත් එහි n_1, n_2 ආදී වශයෙන් n දක්වා අවයව පවතින බව අදහස් වේ. එමෙන්ම මෙහි යම් අවයවයක් n_1 වාරයක් මුළු අවයව තුළ පවතී නම් එම අවයවය නැවත නැවත ගණන් ගැනීම වැලැක්වීමට $n!$, $n_2!$ න් බෙදිය යුතුය. එවිට සංකරණ ගණන X ලෙස සලකන්නේ නම් පහත පරිදි ප්‍රකාශනයක් ලිවිය හැකිය.

x = $\frac{n!}{n_1!}$ හෝ x = $\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}$ (අවයව 3 ක් පිළිවෙලින් n_1 වාරයක් n_2 වාරයක් සහ n_3 වාරයක් ලෙස පවතී නම්)

<u>සංයෝජන</u>

a, b, c, d යන අවයව 4 න් දෙකක් ගෙන සෑදිය හැකි සංයෝජන ගණන කීයක්ද යන්න සලකා බලමු. එවිට ab, ac, ad, bc, bd, cd යන 6 ලැබේ. මෙය සංකරණවලට වඩා වෙනස්ය. මෙහිදී ab ගතහොත් එහි රටාව නොසලකයි. ab යන්නෙහි ba ගත්තද ab ගත්තද අවයව දෙක සමානය. එනිසා එය ba හා ab වශයෙන් ආකාර දෙකක් ලෙස නොසලකයි. මේ අනුව සංයෝජන යනු යම් කිසි කුලකයකින් අවයව දෙකක් හෝ කිහිපයක් ගෙන රටාව නොසලකා සෑදිය හැකි ආකාර ගණන වේ.
n අවයව ප්‍රමාණයකින් r (r <= n) අවයව ප්‍රමාණයක් ගෙන ගොඩ නගන සංයෝජන ප්‍රමාණය
^nC_r හෝ $C_{(n,r)}$ හෝ $\binom{n}{r}$ අංකනය කරනු ලබයි.

<u>අවයව සියල්ල එකිනෙකට වෙනස්වන සංයෝජන</u>

n අවයව ගණනක් පවතින විට ඉන් r අවයව ගණනක් ගෙන සෑදිය හැකි සංයෝජන ගණන දැක්වීමේදී n අවයව සියල්ල එකිනෙකට වෙනස් නම් ද $r \leq n$ද නම් එය $^nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ ලෙස දක්වයි.
සංයෝජන ගණන x ලෙස ගතහොත් එය r! මගින් ගුණ කිරීමෙන් සංකරණ ලබා ගතහැකිබව පෙන්විය හැකිය.

ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිත (TRIGONOMETRIC Functions)

කෝණ මැණීම (Measurement of Angle)

සෘජුකෝණයක් යනු සරල රේඛා දෙකක් එකිනෙක ලම්භකව ඡේදනය වීමෙන් සෑදෙන කෝණයකි. සෘජු කෝණයක් <u>අංශක</u> නමින් හැඳින්වෙන සමාන කොටස් 90 කට තුල්‍ය වේ අංශක එකක් කලා නමින් හැඳින්වෙන සමාන කොටස් 60 කටද කලා එකක් විකලා නමින් හැඳින්වෙන සමාන කොටස් 60 කටද සමාන ලෙස සලකනු ලැබේ.
පිළිවෙළින් අංශකයක්, කලාවක්, සහ විකලාවක් දැක්වීමට $1^0, 1', 1''$ සංකේත භාවිතා කරනු ලැබේ.

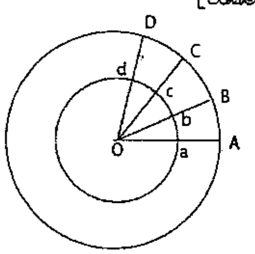
විකලා 60 = කලා 1
කලා 60 = අංශක 1
අංශක 90 = සෘජු කෝණ 1

$60'' = 1'$
$60' = 1^0$
90^0 = සෘජු කෝණ 1

ඉහත මිණුම් ක්‍රමය ෂෂ්ඨික මිණුම් ක්‍රමය ලෙස හැඳින්වේ.

වෘත්ත මැණීම (Circular Measure)

ඕනෑම වෘත්තයක $\left[\frac{\text{පරිධිය}}{\text{විශ්කම්භය}}\right]$ යන්න නියත අගයක් බව පෙන්විය හැකිය. මෙම අගය Π (පයි) ලෙස අංකනය කරමු.



oa = ob

oA = oB

$\therefore ab \,//\, AB \,,\ \therefore \frac{AB}{ab} = \frac{oA}{oa}$

$$\frac{\text{පිටත බහු අශ්‍රයේ පරිධිය}}{\text{අභ්‍යන්තර බහු අශ්‍රයේ පරිධිය}} = \frac{n.AB}{n.ab} = \frac{AB}{ab} = \frac{oA}{oa}$$

$n \to \infty$ වන විට බහු අශ්‍රය වෘත්තයක් වේ .

$$\frac{\text{පිටත වෘතයේ පරිධිය}}{\text{අභ්‍යන්තර වෘතයේ පරිධිය}} = \frac{n.AB}{n.ab} = \frac{AB}{ab} = \frac{oA}{oa}$$

$$\frac{\text{පිටත වෘතයේ පරිධිය}}{\text{අභ්‍යන්තර වෘතයේ පරිධිය}} = \frac{\text{පිටත වෘතයේ අරය}}{\text{අභ්‍යන්තර වෘතයේ අරය}}$$

$$\frac{\text{පිටත වෘතයේ පරිධිය}}{\text{පිටත වෘතයේ අරය}} = \frac{\text{අභ්‍යන්තර වෘතයේ පරිධිය}}{\text{අභ්‍යන්තර වෘතයේ අරය}} = \frac{\text{ඕනෑම වෘතයක පරිධිය}}{\text{එම වෘතයේ අරය}}$$

$\therefore \dfrac{\text{පරිධිය}}{\text{විශ්කම්භය}} = \Pi$. මෙහි Π හි අගය දශම භාගයක් වශයෙන් දැක්විය නොහැකිය. එහි අගය 3.14159265 ... වේ. නමුත් $\dfrac{22}{7} = 3.14285...$ නිසා අපට Π හි අගය $\dfrac{22}{7}$ ලෙස සැලකිය හැකිය.

රේඩියනය (The Radian)

රේඩියනය යනු නියත කෝණයකි. එහි අගය $\dfrac{180^\circ}{\Pi}$ වේ. (ආසන්න වශයෙන් $\dfrac{180^0}{\Pi} = 57^0 17' 44.8''$ ලෙස සැලකිය හැකිය.) මේ අනුව රේඩියන් $1 = \dfrac{180^0}{\Pi}$

180^0 = රේඩියන් Π = සෘජු කෝණ 2

360^0 = රේඩියන් 2Π = සෘජු කෝණ 4

උදාහරණ:

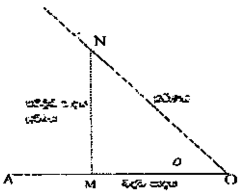
1. පහත රේඩියන් කෝණ අංශක-ඇසුරින් ප්‍රකාශ කරන්න

   i. $\Pi/4$ ii. $3\Pi/2$ iii. $4\Pi/3$

2. පහත කෝණ රේඩියන් ඇසුරින් ප්‍රකාශ කරන්න.

   i. 60^0 ii. 120^0 iii. 135^0 iv. 300^0

සෘජුකෝණයට අඩු කෝණ සඳහා ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත (Trigonometrical Ratios for Angle less than a Right Angle)



ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත හෙවත් ශ්‍රිත පහත පරිදි අර්ථ දැක්වේ.

$\dfrac{MN}{NO} = \dfrac{\text{සම්මුඛ පාදය}}{\text{කර්ණය}} = \sin\theta$ (θ හි සයිනය sine of the angle $A\hat{O}N$).

$\dfrac{MO}{NO} = \dfrac{\text{බද්ධ පාදය}}{\text{කර්ණය}} = \cos\theta$ (θ හි කෝසයිනය cosine of the angle $A\hat{O}N$).

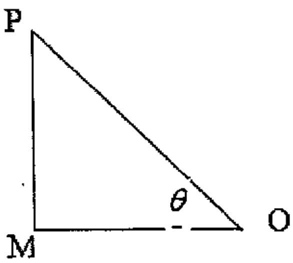
$\dfrac{MN}{MO} = \dfrac{\text{සම්මුඛ පාදය}}{\text{බද්ධ පාදය}} = \tan\theta$ (θ හි ටැංජනය tangent of the angle $A\hat{O}N$).

$\dfrac{ON}{MN} = \dfrac{\text{කර්ණය}}{\text{සම්මුඛ පාදය}} = \operatorname{cosec}\theta$ (θ හි කෝසීකනය cosecant of the angle $A\hat{O}N$).

$\dfrac{ON}{MO} = \dfrac{\text{කර්ණය}}{\text{බද්ධ පාදය}} = \sec\theta$ (θ හි සීකනය secant of the angle $A\hat{O}N$).

$\dfrac{MO}{MN} = \dfrac{\text{බද්ධ පාදය}}{\text{සම්මුඛ පාදය}} = \cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ (θ හි කෝටැංජනය cotangent of the angle $A\hat{O}N$).

කෝණයක ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත අතර මූලික සම්බන්ධතා (Relation Between the Trigonometric Ratios of an Angle)



$MP^2 + OM^2 = OP^2$ -----(1)

OP^2 බෙදීමෙන්

$$\frac{MP^2}{OP^2} + \frac{OM^2}{OP^2} = 1$$
$$\left(\frac{MP}{OP}\right)^2 + \left(\frac{OM}{OP}\right)^2 = 1$$
$$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$$
$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

(1) සමීකරණය දෙපසම OM^2 න් බෙදීමෙන්

$$\frac{MP^2}{OM^2} + \frac{OM^2}{OM^2} = \frac{OP^2}{OM^2}$$
$$\left(\frac{MP}{OM}\right)^2 + 1 = \left(\frac{OP}{OM}\right)^2$$
$$(\tan\theta)^2 + 1 = (\sec\theta)^2$$
$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

උදාහරණ: පහත සිද්ධි සත්‍යාපනය කරන්න.

(i). $\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \cos ecA - \cot A$

(ii). $\sqrt{\sec^2 A + \cos ec^2 A} = \tan A + \cot A$

(iii). $A - \sin^4 A + 1 = 2\cos^2 A$

(iv). $\dfrac{A}{\text{ɔs}\,A} + \dfrac{1+\cos A}{\sin A} = 2\cos ecA$

(1) සමීකරණය දෙපසම MP^2 න් බෙදීමෙන්

$$\frac{MP^2}{MP^2} + \frac{OM^2}{MP^2} = \frac{OP^2}{MP^2}$$

$$1 + \left(\frac{OM}{MP}\right)^2 = \left(\frac{OP}{MP}\right)^2$$

$$1 + (\cot\theta)^2 = (\cos ec\,\theta)^2$$

$$1 + \cot^2\theta = \cos ec^2\theta$$

ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාතවල අගය සීමා (Limits to the Values of the Trigonometrical Ratios)

අප මීට ඉහතදී ලබා ගත් $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ සමීකරණය සලකමු. මෙහි ඇති පද දෙකම වර්ග පද නිසා ඒවා අනිවාර්යයෙන්ම ධන වේ. මෙම පද දෙකෙහි එකතුව 1 නිසා එක් එක් පදයෙහි අගය අනිවාර්යයෙන්ම 1 හෝ 1 ට අඩු විය යුතුය. පදයක වර්ග පදයෙහි අගය 1 ට අඩු නම් එම පදයෙහි අගය 1 ට අඩු වේ. එනිසා $\sin\theta$ හා $\cos\theta$ හි අගය සෑම විටම 1 ට අඩු විය යුතුය. එසේම -1 ට වඩා අඩු විය නොහැකිය.

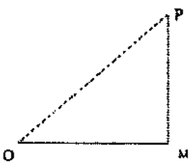
එම නිසා $\sin\theta$ හා $\cos\theta$ හි අගය සෘණ 1 ත් ධන 1 ත් අතර පිහිටයි. තව ද $\dfrac{1}{\sin\theta}$ හි අගය, සංඛ්‍යාත්මක වශයෙන් 1 ට වැඩි විය යුතුය. එසේම $\dfrac{1}{\cos\theta}$ හි අගයද සංඛ්‍යාත්මක වශයෙන් 1 ට වැඩි විය යුතුය. එනම් $\cos ec\theta$ හා $\sec\theta$ හි අගය සංඛ්‍යාත්මක වශයෙන් 1 ට වඩා විශාල වේ. නමුත් $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ හා $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ ට ඕනෑම අගයක් ගත හැකිය. එනම් $\tan\theta$ හා $\cot\theta$ හි සීමාව $-\infty$ සිට ∞ දක්වා විහිදෙයි.

ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාතවල අගය (Values of the Trigonometric Ratios)

කෝණය	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
sin	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0
tan	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

පංති කාමරයේදී සාකච්ඡා කරනු ලැබේ.

කෝණ දෙකක ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත අතර සම්බන්ධතා (The Relations between the Trigonometrical Ratios of Two Angle)



$\sin(90-\theta) = \dfrac{MO}{PO}$....(1)

$\cos(\theta) = \dfrac{MO}{OP}$..........(2)

$(1) = (2) \Rightarrow \sin(90-\theta) = \cos(\theta)$ *

$\cos(90-\theta) = \dfrac{MP}{PO}$....(3)

$\sin(\theta) = \dfrac{MP}{OP}$..........(4)

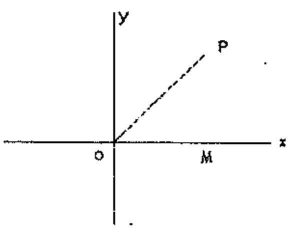
$(3) = (4) \Rightarrow \cos(90-\theta) = \sin(\theta)$ *

$tan(90-\theta) = \dfrac{MO}{MP}$....(5)

$\cot(\theta) = \dfrac{MO}{MP}$..........(6)

$(5) = (6) \Rightarrow \tan(90-\theta) = \cot(\theta)$ *

ඕනෑම විශාලත්වයකින් යුත් ඕනෑම ලකුණකින් යුත් කෝණවල ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිත (Trigonometric Functions of any Angle and any Sign)



sin,cos හා tan හි මූලික අර්ථ දැක්වීම පහත පරිදි වේ.

$$\sin = \frac{\text{r හි y අක්ෂය මත ලම්බ ප්‍රක්ෂේපණය}}{r}$$

$$\cos = \frac{\text{r හි x මත ලම්බ ප්‍රක්ෂේපණය}}{r}$$

$$\tan = \frac{\text{r හි y අක්ෂය මත ලම්බ ප්‍රක්ෂේපණය}}{\text{r හි x මත ලම්බ ප්‍රක්ෂේපණය}}$$

න්‍යාස Matrices

සෘජුකෝණාස්‍රාකාර හැඩයකට ඇති දත්ත වැලක් න්‍යාසයක් ලෙස සලකනු ලැබේ. දත්ත වගුවක ඇති දත්ත න්‍යාසයක ඇති දත්ත ලෙස සැලකිය හැකිය.

$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 3 & 1 \\ 8 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ මෙය න්‍යාසයකි.

න්‍යාසයක විශාලත්වය (ප්‍රමාණය) එහි පේළි සහ තීරවල ප්‍රමාණය මගින් ප්‍රකාශ වේ. න්‍යාසයක පේළි m හා තීර n ප්‍රමාණයක් ඇත්නම් එය $m \times n$ මාණයේ (dimension) න්‍යාසයක් ලෙස හඳුන්වයි. i වන පේළිය හා j වන තීරය හමුවන ස්ථානයේ ඇති අවයවය (i, j) වන අවයවය ලෙස හඳුන්වයි. න්‍යාස දෙකක් සමාන යැයි කියනු ලබන්නේ එම න්‍යාස දෙකෙහි සියළුම (i, j), මෙහි $i, j = 1,2,\ldots$ අවයව සමාන නම් පමණි.

න්‍යාසයක් හැඳින්වීමට ඉංග්‍රීසි හෝඩියේ අකුරු භාවිතා කරනු ලබයි.

$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}_{2\times3}$ මෙය (2×3) න්‍යාසයකි.

$B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 5 \\ 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}_{4\times2}$ මෙය (4×2) න්‍යාසයකි.

$C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 9 & 13 & 0 \end{pmatrix}_{2\times5}$ න්‍යාසයකි.

පේළි සහ තීර ප්‍රමාණය සමාන විට එය සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයක් ලෙස හැඳින්වේ. $m = n$ විට $(n \times n)$ න්‍යාසය n මාණයේ සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයක් ලෙස හැඳින්වේ.

න්‍යාසයක් සංකේත වශයෙන් දැක්වීම

මෙය (2×5)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

මෙහි:

a_{11} - 1 වන පේළියේ 1 වන අවයවය

a_{23} - 2 වන පේළියේ 3 වන අවයවය

a_{54} - 5 වන පේළියේ 4 වන අවයවය

a_{ij} - i වන පේළියේ j වන අවයවය

න්‍යාස වීජය (Matrix Algebra)

න්‍යාස එකතු කිරීම (Addition)

න්‍යාස දෙකෙහි තීර සහ පේළි ගණන සමාන නම් පමණක් එම න්‍යාස දෙක එකතු කළ හැකිය. න්‍යාස දෙකක් එකතු කිරීමෙන් පසු ලැබෙන අළුත් න්‍යාසයේ මාණය මුලික න්‍යාස දෙකෙහි මාණයට සමාන වේ. (2×3) හා (2×3) න්‍යාස දෙක එකතු කිරීමෙන් (2×3) මාණයේ න්‍යාසයක් ලැබේ.

උදාහරණ:

$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}_{2\times3}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 1 \end{pmatrix}_{2\times3}$ A හා B න්‍යාස දෙක එකතු කළ පසු ලැබෙන අළුත් න්‍යාසය C නම් $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ වෙයි.

මෙහි:

c_{ij} - C හි i වන පේළියේ j වන අවයවය

a_{ij} - A හි i වන පේළියේ j වන අවයවය

b_{ij} - B හි i වන පේළියේ j වන අවයවය

න්‍යාස ගුණ කිරීම (Matrix Multiplication)

න්‍යාස දෙකක් ගුණ කිරීම සලකා බලමු. ඕනෑම න්‍යාස දෙකක් ගුණ කිරීම සෑම විටම සිදු කළ නො හැකිය. ඒ සඳහා පූර්ව කොන්දේසියක් සම්පූර්ණ කළ යුතුය. A හා B න්‍යාස දෙක ගුණ කළ හැක්කේ

A හි තීර ගණන = B පේළි ගණන වන්නේ නම් හා නම්ම පමණි.

A න්‍යාසය $(k \times m)$ මාණයේ නම් හා B න්‍යාසය $(m \times n)$ මාණයේ නම් (මෙහි A හි තීර ගණන m හා B හි පේළි ගණන m වේ.) AB හි ගුණිතයෙහි (i, j) වන අවයවය ලබා ගැනීමට A හි i වන පේළිය හා B හි j වන තීරය ගුණ කිරීම පහත ආකාරයට සිදු වේ.

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & .. & a_{im} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ . \\ b_{mj} \end{pmatrix} = \left(a_{i1}b_{1j} \quad + a_{i2}b_{2j} \quad + \ldots \quad + a_{im}b_{mj}\right)$$

තවද AB හි ගුණිතයේ (i,j) වන අවයවය $\sum_{r=1}^{m} a_{ir}b_{rj}$ මගින් ලබා ගත හැකිය.

උදාහරණ: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}_{3\times2} \times \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}_{2\times2} = \begin{pmatrix} aA+bC & aB+bD \\ cA+dC & cB+dD \\ eA+fC & eB+fD \end{pmatrix}_{3\times2}$

A න්‍යාසය $(k\times m)$ මාණයේ හා B න්‍යාසය $(m\times n)$ මාණයේ න්‍යාස දෙකක් නම් AB ගුණිතය මගින් ලැබෙන නව න්‍යාසය AB නම් එය $(k\times n)$ මාණයේ න්‍යාසයක් වේ.

AB හි පේළි ගණන $=$ A පේළි ගණන

AB හි තීර ගණන $=$ B තීර ගණන

$(k\times m).(m\times n) = (k\times n)$

සටහන:

AB න්‍යාසය අර්ථ දැක්විය හැකි වුවත් BA අර්ථ දැක්විය නොහැකි විය හැකිය. සමචතුරස්‍ර න්‍යාසයක පමණක් AB හා BA පවතී.නමුත් $AB \neq BA$. විශේෂිත අවස්ථාවකදී පමණක් $AB = BA$ විය හැකිය.

න්‍යාසයක පෙරළුම (Transpose of a matrix)

$(m\times n)$ න්‍යාසයේ පේළි සහ තීර අතුරුමාරු කිරීමෙන් ලබා ගන්නා $(n\times m)$ න්‍යාසයට $(m\times n)$ න්‍යාසයේ පෙරළුම යැයි කියනු ලැබේ. න්‍යාසය A නම් A හි පෙරළුම A^T (A') ලෙස ලියනු ලැබේ. A හි පළමු පේළිය A^T හි පළමු තීරය වේ. A හි දෙවන පේළිය A^T හි දෙවන තීරය වේ. A හි (i,j) අවයවය A^T හි (j,i) අවයවය වේ.

නිශ්චායක (Determinants)

A න්‍යාසයේ නිශ්චායකය $|A|$ හෝ $\det A$ මගින් සංකේතවත් කෙරේ. (1×1) න්‍යාසය අදිශයක් ද වෙයි. එහි නිශ්චායකය $\det A = a$ ලෙස අර්ථ දක්වා ඇත. (2×2) න්‍යාසයේ නිශ්චායකය $|A_{2\times2}|$ හෝ $\det A$ ලෙස ගනිමු.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{2\times2}$ නම් $\det A$ යන්න පහත පරිදි අර්ථ දක්වා ඇත.

$$\det A = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$= a_{11}\det(a_{22}) - a_{12}\det(a_{21})$$

නිශ්චායකයක කනිෂ්ඨය (Minor of a determinant) සහ සහසාධකය (cofactor)

A යනු $(m\times n)$ න්‍යාසයක් ලෙස ගනිමු. එහි i වන පේළිය සහ j වන තීරය මැකීමෙන් (ඉවත් කිරීමෙන්) ලැබෙන උප නයාසය A_{ij} නම්,

$M_{ij} = \det A_{ij}$ (A_{ij} හි නිශ්චායකය) යන්න A හි (i,j) වන කනිෂ්ඨය ලෙස හඳුන්නු ලැබේ. තවද,

$C_{ij} = (-)^{i+j} M_{ij}$ යන්න A හි (i,j) වන සහසාධකය (cofactor) ලෙස හැඳින්වේ.

නයාසයක ප්‍රතිලෝමය (Inverse of a Matrix)

අර්ථ දැක්වීම: A යනු නයාසයක් නම් හා $AB = I$ වන පරිදි B නයාසයක් පවතී නම් එම B නයාසය A හි ප්‍රතිලෝමය යැයි හඳුන්වනු ලැබේ.

මූලධර්මය: $n \times n$ මාණයේ A නයාසයට පැවතිය හැක්කේ උපරිම වශයෙන් එක් ප්‍රතිලෝමයක් පමණි.
$n \times n$ මාණයේ A නයාසයෙහි ප්‍රතිලෝමය A^{-1} ලෙස අංකනය කරනු ලබයි.

අර්ථ දැක්වීම:
නයාසයක සම්බන්ධය (Adjoint of a Matrix)

$n \times n$ මාණයේ A නයාසයෙහි (i,j) වන *සහසාධකය (cofactor)* C_{ij} ලෙස ගනිමු (එනම් A හි i වන පේළිය හා j වන තීරය ඉවත් කිරීමෙන් ලැබෙන උප නයාසයෙහි නිශ්චායකය $(-1)^{i+j}$ වලින් ගුණ කිරීමෙන් ලැබෙන අගය). A හි (i,j) වන ස්ථාන සඳහා (j,i) වන **සහසාධක** (C_{ji}) ප්‍රතිස්ථාපනය කිරීමෙන් ලැබෙන $n \times n$ මාණයේ නයාසය A නයාසයෙහි *සම්බන්ධය (Adjoint of A Matrix)* ලෙස හඳුන්වනු ලබන අතර එය $\mathrm{adj}A$ ලෙස අංකනය කරනු ලැබේ.

සමීකරණ පද්ධති නයාස සමීකරණයක පිහිටුවීම

ඒකජ සමීකරණ පද්ධතියක් නයාසවලින් යුත් සමීකරණයක් ලෙස දැක්විය හැකිය.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$

.

.

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k$$

මෙහි සමීකරණ k ප්‍රමාණයක් ඇත. එහි විචල්‍යයන් n ප්‍රමාණයක් $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ඇත. වම් පස නියත පද $k \times n$ ප්‍රමාණයක් හා දකුණු පස නියත පද k ප්‍රමාණයක් ඇත. වම් පස ඇති නියත පද පහත පරිදි $k \times n$ මාණයේ A නයාසයක දක්වමු.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

නලින් විජේසිංහ
ආර්ථිකවිද්‍යා අධ්‍යයනාංශය
17/07/2016